TD bonus : Variables aléatoires à densité

Exercice 1. Exemple d'une densité nulle en dehors d'un segment

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} at(2-t) & \text{si } t \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le réel a pour que la fonction f soit une densité de probabilité.
2. On note X une variable aléatoire de densité f.
   Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X > 1/2)$.
4. X a-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
5. X a-t-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Exercice 2. Loi de Pareto

Soit λ un réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{t^{\lambda+1}} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. On note X une variable aléatoire de densité f.
   Déterminer la fonction de répartition de X.
3. X a-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
4. X a-t-elle une variance ? Si oui, la calculer.
5. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$. Déterminer la loi de Y.
6. Pour quelles valeurs de λ la variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?

Exercice 3. Variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty[$

Soit X une variable aléatoire à densité f, de fonction de répartition F.
On fait les hypothèses suivantes : f est nulle sur $]-\infty, 0[$, f est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \; P(X > x) > 0$.
2. Montrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution unique m sur $]0, +\infty[$. (m est alors appelé <u>médiane</u> de X).

Exercice 4. Loi uniforme : transfert

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Dans chacun des cas suivants, reconnaître la loi de Y et donner sans calcul l'espérance de Y.
   (a) $Y = 2X + 1$
   (b) $Y = -2X + 1$
   (c) $Y = -\ln X$
   (d) $Y = |X - 0{,}5|$
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]-1,1[)$. On pose $Y = \ln\left(\dfrac{1+X}{1-X}\right)$.
   (a) Expliciter la fonction de répartition de Y.
   (b) En déduire que Y est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Y.

Exercice 5. Loi uniforme : partie entière

1. Donner la loi de $\lfloor X \rfloor$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]-10,10[)$, puis lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([0, \sqrt{2}]\right)$.
2. Soit $n \geqslant 2$ fixé. Déterminer la loi de $Z = X - \lfloor X \rfloor$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, n])$.

Exercice 6. Loi exponentielle : médiane

La variable X suit la loi exponentielle de paramètre λ, réel strictement positif.
Calculer la médiane de X. Comparer la médiane et l'espérance de X.

Exercice 7. Loi exponentielle : utilisation comme outil de calcul

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Montrer que X admet une espérance et une variance que l'on déterminera avec le moins de calculs possibles.

Exercice 8. Loi exponentielle et loi géométrique

La variable X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$.
2. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor + 1$. La reconnaître.
   En déduire l'espérance et la variance de $\lfloor X \rfloor$.
3. Déterminer la fonction de répartition de $Z = X - \lfloor X \rfloor$.

Exercice 9. Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$: valeur absolue

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et soit $Y = |X|$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Y.

Exercice 10. Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$: manipulation de la fonction Φ

La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
Soit n un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.
Pour quelle valeur du réel positif a la probabilité $\mathbb{P}(a < X < na)$ est-elle maximale ?
On commencera par exprimer cette probabilité à l'aide de la fonction Φ, fonction de répartition de X.

Exercice 11. Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

T, température moyenne au mois de juillet à Strasbourg, suit la loi normale $\mathcal{N}(28, 25)$.

1. Préciser une densité, l'espérance et la variance de T.
2. Calculer $\mathbb{P}(25 \leqslant T \leqslant 32)$ avec la précision permise par la table de la loi normale centrée réduite du cours.
3. De même avec $\mathbb{P}(T \leqslant 23)$.

Exercice 12. Lois normales : utilisation comme outil de calcul

1. En utilisant une loi normale bien choisie, montrer que pour $a > 0$ et $m \in \mathbb{R}$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-m)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$
2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,\mathrm{d}x$ en fonction de a, b et c (avec $a > 0$).